

---

---

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕРЧА (ТОРНАДО)

В.С. ПОЛИТОВ

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

В начале следует отметить, что рассматриваемая аналитическая модель смерча (торнадо) включает в себя три составные части. Ими являются: газодинамическая структура смерча, кинематика и динамика смерча, энергетика смерча. Последнюю следует принимать как основу для дальнейшего практического использования предлагаемой аналитической модели в целом. К исследованию проблемы приложено немало усилий, особенно для понимания свойств, лежащих в самой природе протекающих в смерче энергетических процессов.

## 1. Газодинамическая структура смерча

Газодинамическая структура смерча рассматривается в достаточной степени идеализированных условиях. Смерч представляется как закрученный поток атмосферного воздуха с осью симметрии, перпендикулярной поверхности Земли. Высота потока — от грозового облака, в котором он зарождается, до некоторой поверхности, расположенной над Землей и параллельной ее горизонту. Данное условие позволяет аналитически исключить воздействие на динамические процессы смерча присоединенной массы. Например, воды и различных твердых предметов, которые вовлекаются во вращающийся газовый поток по достижении им поверхности земли. Из рассмотрения также исключается внешнее воздействие на смерч перемещающихся в различных направлениях воздушных масс ("ветровое" воздействие). На рис. 1 представлена газодинамическая структура смерча, включающая три области течения: приосевую ("ядро" смерча), центральную ("каскад"), периферийную ("сток"). В основу структуры положен анализ свидетельств многочисленных очевидцев этого удивительного и загадочного явления природы большой разрушительной энергии [1, 2, 3], а также теоретических и экспериментальных работ по закрученным течениям жидкостей и газов, выполненных различными исследователями, в том числе, автором настоящей работы [4—7].

Возникновение смерча (торнадо) связано с грозовым облаком [1]. Можно полагать, что в последнем по тем или иным причинам возникают локальные потоки с различными скоростями. Например, за счет торможения части облака восходящими потоками атмосферного воздуха, нагретого у поверхности земли. В самом грозовом облаке могут иметь место восходящие потоки, достигающие скорости порядка 30—40 м/с [8]. Поверхность разрыва скорости, непременно возникающей при этом между двумя потоками, за счет внутреннего трения трансформируется в переходный слой с градиентом скорости по нормали к вектору скорости относительного движения. Сочетание такого переходного слоя с перемещением значительных масс, составляющих грозовое облако, при определенных параметрах движения может привести к образованию достаточно мощного циркуляционного потока — начального "вихря". Характерной особенностью последнего является возникновение в нем приосевой области с вращательным движением частиц, составляющих ее массу, относительно оси симметрии потока по закону твердого тела,  $\frac{V_{\phi}}{r} = \omega = \text{const}$  ( $V_{\phi}$  — окружная скорость,  $r$  — текущий радиус,  $\omega$  — угловая скорость). Кроме того, по отношению к внешней среде в данной области имеет место пониженное давление [9].

За счет внутреннего трения вращательное движение от приосевой области начального "вихря" передается находящемуся ниже его атмосферному воздуху. В последнем также возникает приосевая область пониженного давления и, следовательно, пониженной плотности. С другой стороны, грозовое облако является "капельным" и весьма плотным [8]. Можно полагать, что под действием силы тяжести масса большей плотности, соответствующей грозовому облаку, за счет движения вниз начинает заполнять приосевую область, образовавшуюся в атмосферном воздухе. Возникает так называемая "воронка" смерча, отвисающая книзу из грозового облака [1]. Далее подобный процесс развивается непрерывно, что приводит к образованию приосевой области по всей высоте смерча (рис. 1). Она является частью грозового облака и видимой частью смерча. Диаметр приосевой области обычно колеблется от метров до нескольких десятков метров, высота равна высоте смерча и может достигать нескольких сот метров, иногда до 1000—1500 м и более [8].

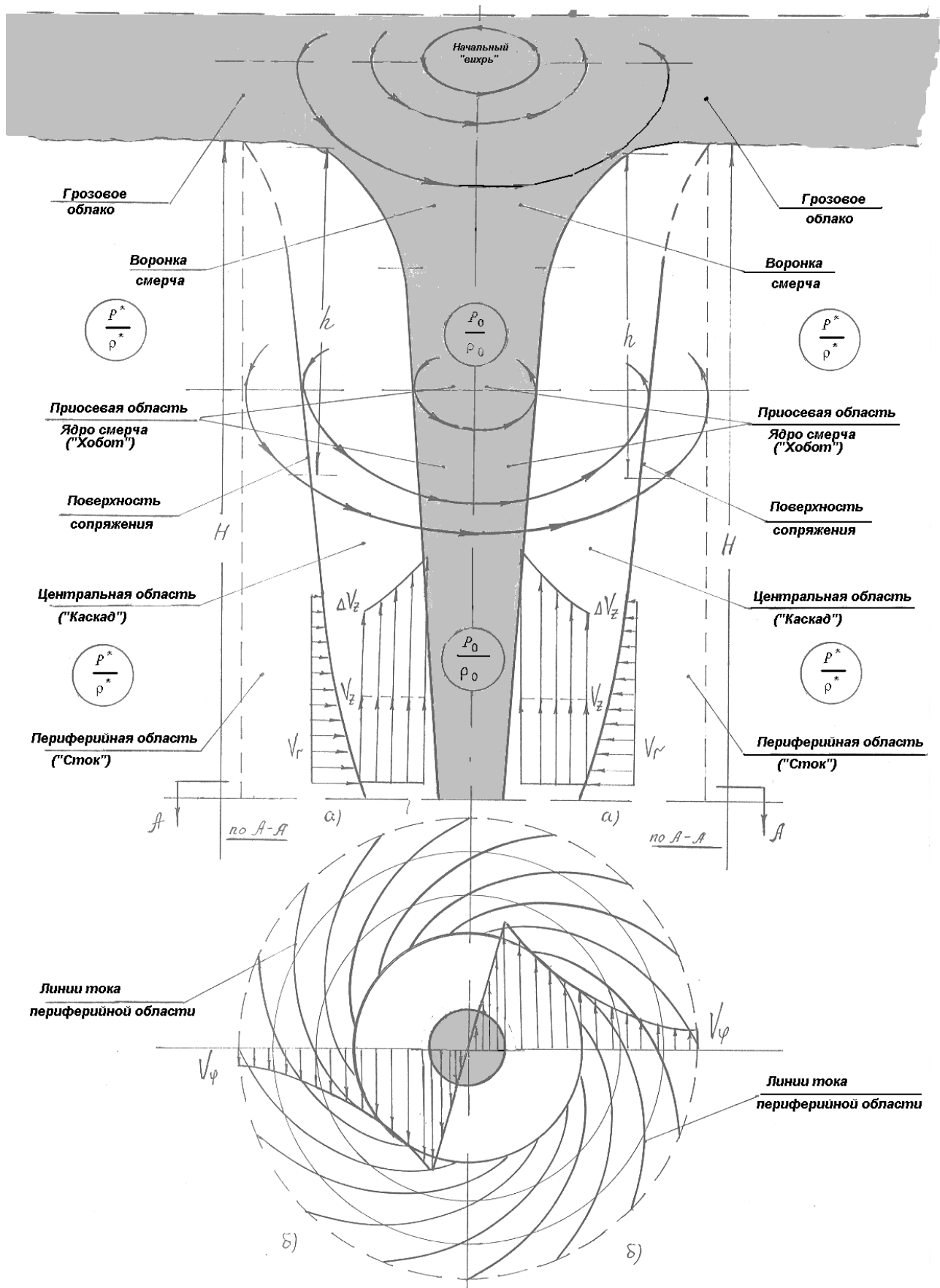


Рис. 1

В процессе формирования смерча между внешней атмосферой и приосевой областью возникает перепад удельной потенциальной энергии давления,  $\frac{P^*}{\rho^*} - \frac{P_0}{\rho_0}$ , (рис. 1). Кроме того, за счет внутреннего

трения вращательное движение частиц, составляющих приосевую область, передается частицам атмосферного воздуха. В итоге образуется вращающийся осесимметричный поток атмосферного воздуха с движением частиц с радиальной скоростью  $V_r$  в направлении к приосевой области. В центральную часть смерча начинают поступать массы атмосферного воздуха. Если есть приход секундной массы, то должен быть и ее расход. Таким образом, в центральной части должен образовываться вращающийся поток атмосферного воздуха, в котором имеет место движение частиц воздуха вверх с осевой скоростью  $V_z$  — в направлении уменьшения атмосферного давления. В конечном итоге вокруг приосевой области, как части грозового облака, образуется закрученный (осесимметричный вращающийся) поток атмосферного воздуха. Часть потока, которая характеризуется в основном радиальной  $V_r$  и окружной  $V_\varphi$  компонентами вектора скорости, будем относить к периферийной области смерча. Она невидима, что и является причиной упоминания о ней в научно-популярной литературе. Часть потока, которая характеризуется в основном осевой  $V_z$  и окружной  $V_\varphi$  компонентами вектора скорости, будем относить к центральной области смерча (рис. 1). По достижении смерчем поверхности земли в его центральную область вовлекаются различные предметы и она становится видимой. В научно-популярной литературе она именуется как "каскад" [1]. Исходя из известных закономерностей закрученных течений жидкостей и газов, можно полагать — вращательное движение частиц воздуха, составляющих периферийную и центральную области смерча, относительно

его оси симметрии происходит по закону постоянства циркуляции скорости —  $\frac{\Gamma}{2\pi} = V_\varphi r = \text{const}$  [10].

## 2. Кинематика и динамика смерча

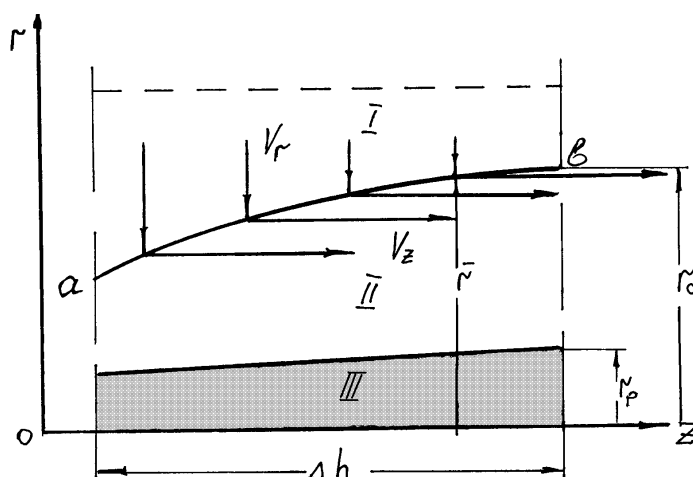
Основу аналитической модели смерча (торнадо) составляют кинематические и динамические закономерности закрученного (осесимметричного вращающегося), установившегося, потенциального течения идеального совершенного газа [6]. Данное течение хорошо отражает свойства закрученного потока с уже заданным вращательным движением частиц относительно его оси симметрии. Это в полной мере относится к периферийной и центральной областям смерча, так как в них вращательное движение частиц определяется вращательным движением частиц в приосевой области. Используется цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  с осью  $r=0$ , совпадающей с осью симметрии смерча. Рассматриваются два случая: при исключении влияния на кинематические и динамические параметры движения и состояния в периферийной и центральной областях потенциальной энергии положения частиц (гравитационной энергии); с учетом гравитационной энергии частиц, которая может достигать значительных величин при больших высотах смерча. В основу исследований положена система дифференциальных уравнений движения в форме Громеки–Ламба. В первом случае система уравнений используется при условии  $g \ll \frac{V_\varphi^2}{r}$  и после приведения ее к виду

$$d \left[ \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right] = 2 \begin{vmatrix} dr & r d\varphi & dz \\ V_r & V_\varphi & V_z \\ \omega_r & \omega_\varphi & \omega_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $V_r, V_\varphi, V_z$  — проекции вектора скорости на оси координат,  $V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2$ ,  $P$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\frac{V_\varphi^2}{r}$  — центробежное ускорение,  $\omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right)$ ,  $\omega_\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$ ,  $\omega_z = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(V_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{r \partial \varphi} \right]$  — компоненты вращательного движения частиц. Правая часть уравнения (1) отражает кинематику, а левая — динамику закрученных газовых потоков. Они рассматриваются совместно с дифференциальным уравнением неразрывности [11].

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим кинематику закрученного течения в периферийной и центральной областях. Для этого выделим элемент смерча шириной много меньшей его высоты,  $\Delta h \ll H$  (рис. 2). С целью исключения влияния гравитационной энергии на кинематические и динамические параметры закрученного течения, рассмотрим задачу при горизонтальном положении оси  $z$ .



I — периферийная область, II — центральная область, III — приосевая область

Рис. 2

Для потенциальных потоков справедливо равенство  $\omega_r = \omega_\varphi = \omega_z = 0$ . При условии, что для осесимметричного потока  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ , имеем:  $V_r(\varphi) = \text{const}$ ,  $V_\varphi(\varphi) = \text{const}$ ,  $V_z(\varphi) = \text{const}$ . При этом из выражений для

$\omega_r$  и  $\omega_z$  получим соответственно:  $V_\varphi(z) = \text{const}$ ,  $\frac{\Gamma}{2\pi} = V_\varphi r = \text{const}$ . Данные закономерности известны в гидромеханике закрученных течений и подтверждены экспериментально [9], [12].

Основная закономерность кинематики закрученных потоков вытекает из равенства  $\omega_\varphi = 0$ . Здесь имеют место два условия:  $\frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \neq 0$  и  $\frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0$ . В проекции на меридиональную плоскость  $r - z$  закрученное течение можно рассматривать как аналог безвихревого течения внутри прямого угла, которое характеризуется различными знаками при производных:  $\frac{\partial V_r}{\partial z} < 0$ ,  $\frac{\partial V_z}{\partial r} > 0$  (рис. 2, область II). Следовательно, при первом условии закрученное течение не реализуется. Из второго условия следует:  $V_r(z) = \text{const}$  и  $V_z(r) = \text{const}$ , что возможно при условии  $V_z = 0$  и  $V_r = 0$  соответственно. С другой стороны, периферийная область характеризуется прежде всего компонентами скорости  $V_r$  и  $V_\varphi$ , а центральная область — компонентами скорости  $V_z$  и  $V_\varphi$ . Следовательно, в периферийной области —  $V_r(z) = \text{const}$  и  $V_z = 0$ , в центральной области —  $V_z(r) = \text{const}$  и  $V_r = 0$ . Отсюда следует очень важный вывод, а именно: в закрученных потенциальных потоках жидкости и газа переход от радиального ( $V_r$ ) движения частиц к их осевому ( $V_z$ ) движению происходит в точках сопряжения данных движений, в которых  $V_z \perp V_r$ . Геометрическим местом точек сопряжения является линия сопряжения  $a - b$  (рис. 2).

Из дифференциального уравнения линии тока  $\frac{dr}{V_r} = \frac{rd\varphi}{V_\varphi} = \frac{dz}{V_z}$  следует, что в периферийной области линии тока представляют собой логарифмические спирали,  $\frac{dr}{r} = \frac{V_r}{V_\varphi} d\varphi$ . В центральной области линиями

тока являются винтовые линии,  $dz = \frac{V_z}{V_\varphi} r d\varphi$ . Данные закрученные потенциальные течения известны в механи-

ке жидкости и газа. Первое складывается из двух потенциальных потоков — "плоский вихрь" + "сток". Второе — "плоский вихрь" + "плоско-параллельный поток" [10]. На рис. 1 представлены эпюры компонентов скорости: в периферийной области —  $V_r$ , в центральной области —  $V_z$ , во всех трех областях —  $V_\varphi$ .

Из дифференциального уравнения линии сопряжения  $dz = \frac{V_z}{V_r} dr$  следует, что она является параболой.

Следовательно, поверхность сопряжения является параболической поверхностью вращения.

Рассмотрим динамику закрученного течения в периферийной и центральной областях. При условии  $\omega_r = \omega_\phi = \omega_z = 0$  и изменении состояния газа согласно адиабатическому закону  $\left(\frac{P}{\rho^k} = \text{const}\right)$  интегралами

ми левой части уравнения (1) являются:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_r}{\rho_r} + \frac{V_r^2}{2} + \frac{V_{\phi r}^2}{2} = C_r \text{ — для периферийной области течения,}$$

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_z}{\rho_z} + \frac{V_z^2}{2} + \frac{V_{\phi z}^2}{2} = C_z \text{ — для центральной области течения.}$$

Здесь  $k$  — показатель адиабаты,  $P_r$  и  $P_z$  — давления,  $\rho_r$  и  $\rho_z$  — плотности,  $C_r$  и  $C_z$  — постоянные интегрирования в периферийной и центральной областях, соответственно. Вопросы процесса прохождения частицами поверхности сопряжения при этом остаются открытыми.

В области I (рис. 2) выделим плоскую кольцевую струйку тока высотой  $\Delta z$  (рис. 3). Она ограничена двумя плоскими поверхностями тока, которые ортогональны оси  $z$  и образованы линиями тока — логарифмическими спиралями. По условию  $V_r = 0$  в области II частицы могут проходить поверхность сопряжения только при своем движении в направлении оси  $z$ . Следовательно, в области II плоской кольцевой струйке тока области I соответствует цилиндрическая кольцевая струйка тока толщины  $\Delta r$ . Она ограничена двумя цилиндрическими поверхностями тока радиусов  $r$  и  $r + \Delta r$ , образованными винтовыми линиями тока. При сопряжении данных струек тока образуется кольцевая цилиндрическая струйка высотой  $\Delta z$  с постоянной площадью нормального сечения  $\Delta F = 2\pi r \Delta r$ . Можно полагать, что частицы газа при своем прохождении через поверхность сопряжения, характеризуются тремя компонентами скорости  $V_r, V_\phi, V_z$  при условии  $V_\phi(z) = \text{const}$ . К подобной струйке конечных размеров не может быть применено уравнение количества движения в гидродинамической форме. Причиной этому является условие  $V_z \perp V_r$ . Уравнение количества движения может быть применено в случае "стягивания" струйки к размерам частиц и при предположении, что компонента скорости  $V_r$  преобразуется в компоненту скорости  $V'_z$ ,  $V'_z \perp V_r$  и  $|V'_z| = |V_r|$  (рис. 3). При этом частицы образуют элементарную струйку  $2\pi r dr dz$ , а центры масс частиц находятся в точках сопряжения потоков (в особых точках, принадлежащих областям I и II).

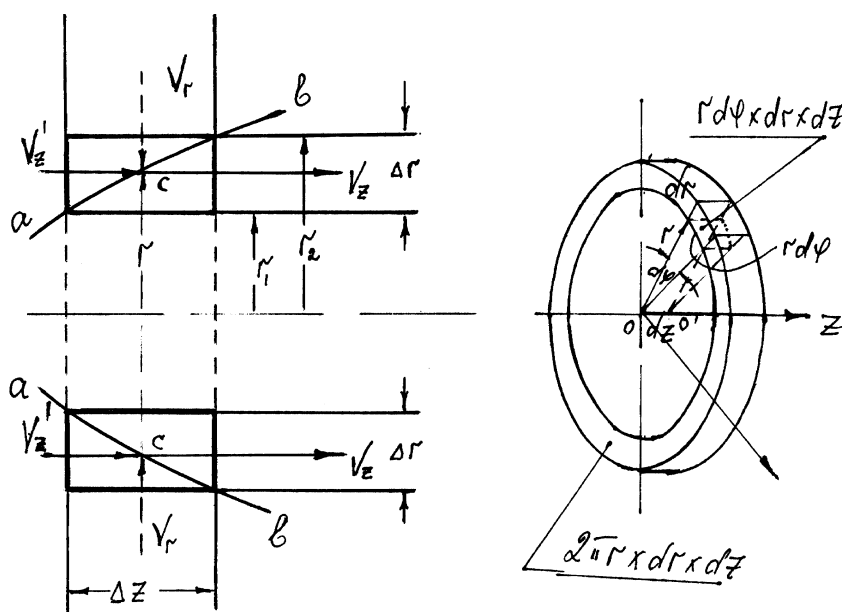


Рис. 3

По аналогии с применением уравнения количества движения к прямолинейной струйке с постоянной площадью нормального сечения  $dF = 2\pi r dr$  при бесконечно малом расстоянии  $dz$  между контрольными

поверхностями, в рассматриваемой задаче правомерно использование уравнения количества движения в дифференциальной форме. Последнее легко преобразуется в дифференциальную форму уравнения Бернулли [13].

$$\text{При условии } V_{\phi}(z) = \text{const оно приобретает вид } \frac{dP}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0.$$

В конечном итоге приходим к следующему интегралу Бернулли:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_r}{\rho_r} + \frac{V_r^2}{2} + \frac{V_{\phi r}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_z}{\rho_z} + \frac{V_z^2}{2} + \frac{V_{\phi z}^2}{2} = C. \quad (3)$$

Здесь  $C = C_r = C_z$  — постоянная интегрирования во всех точках закрученного течения периферийной и центральной областях, включая точки, составляющие поверхность сопряжения.  $C = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P^*}{\rho^*}$ , где  $P^*$  и  $\rho^*$  — давление и плотность заторможенного газа соответственно (внешней атмосферы, рис. 1).

В работе [6] показано, что при  $\Delta h > \frac{(r_c^2 - r_p^2)}{2r}$  (рис. 2) во всех точках поверхности сопряжения  $V_r < V_z$  (следует из рассмотрения расходных характеристик закрученных потоков жидкости и газа). Таким образом, при данном условии скорость движения и параметры состояния газа, как функции точек пространства, в котором происходит закрученное течение, в точках, составляющих поверхность сопряжения, терпят разрыв. При этом скорость скачком увеличивается, давление, плотность и температура скачком уменьшаются. По аналогии со скачком уплотнения в сверхзвуковом газовом потоке поверхность сопряжения в дозвуковых закрученных потоках следует считать поверхностью скачка разрежения. Очевидно, по данной аналогии толщина фронта скачка разрежения соизмерима с длиной пути свободного пробега молекул. В отличие от скачка уплотнения в процессе прохождения частицами газа фронта скачка разрежения энтропия остается постоянной,  $S = C_v \ln\left(\frac{P}{\rho^k}\right) = \text{const}$  ( $C_v$  — теплоемкость при постоянном объеме).

Интенсивность скачков разрежения целесообразно определять числами  $Pl$ :  $Pl_v = \frac{V_1}{V_2}$ ,  $Pl_{vz} = \frac{V_r}{V_z}$ ,

$Pl_p = \frac{P_r}{P_z}$ ,  $Pl_{\rho} = \frac{\rho_r}{\rho_z}$ ,  $Pl_T = \frac{T_r}{T_z}$ . Здесь индексы 1 и 2,  $r$  и  $z$  — относятся к периферийной и центральной областям, соответственно. Образование скачков разрежения в дозвуковых закрученных потоках газа подтверждено экспериментально [6].

### 3. Энергетика смерча

При рассмотрении газодинамической структуры смерча показано, что его формированию предшествует возникновение в грозовом облаке начального "вихря" — циркуляционного потока, имеющего в своей приосевой части пониженное давление по сравнению с давлением в окружающей атмосфере. Именно с этого момента в атмосфере начинает развиваться газодинамическая самоподдерживающаяся энергетическая система. Это обеспечивается двумя энергетическими процессами: за счет внутреннего трения вращательное движение от массы среды приосевой области передается соответствующей массе атмосферного воздуха; за счет разности удельных потенциальных энергий давления во внешней атмосфере и в приосевой области возникает радиальное ( $V_r$ ), а затем осевое ( $V_z$ ) движения частиц атмосферного воздуха в периферийной и центральной областях соответственно. Далее, по мере "опускания" приосевой области, все новые массы атмосферного воздуха вовлекаются во вращательное движение, что является причиной уменьшения диаметра области. Это наблюдается на фотографиях реальных смерчей (рис. 4) и отражено на рис. 1. Можно полагать, что по завершении формирования смерча его приосевая и периферийная области течения характеризуются вертикальным устойчивым равновесием. Наконец, определяющей особенностью рассматриваемого энергетического процесса является то, что линейные перемещения частиц газа происходят в поле центробежных ускорений, значительно превышающих ускорение

свободного падения,  $\frac{V_{\phi}^2}{r} \gg g$ .





Рис. 4

В каждом плоском сечении смерча, перпендикулярном его оси симметрии (рис. 1, б), течение газа в его периферийной части по линиям тока — логарифмическим спиральям можно рассматривать как аналог течения идеального газа по сужающемуся каналу, не имеющему стенок. Является очевидным, что по всей длине каждой из концентрических окружностей, составляющих периферийную часть сечения, частицы газа имеют одинаковые физические характеристики и равные кинематические и динамические параметры движения и состояния. Следовательно, в периферийной области смерча, как потоке реального газа, внутреннее трение не проявляется. Таким образом, смерч — вертикальный вращающейся "столб" вязкого газа, может рассматриваться как аналог вихревой трубки в идеальной жидкости. К последней применимы вторая и третья теоремы Гельмгольца о вихрях, утверждающие закон о сохранении вихря в идеальной жидкости [10]. Данная особенность энергетической модели смерча является одной из причин его длительного существования.

Следующей важной особенностью смерча является образование по всей его высоте фронта скачка разрежения. Прохождение частицами газа данного фронта происходит при условиях:  $|V_z| \gg |V_r|$  и  $V_z \perp V_r$ . Согласно первому условию плотность газа, соответственно массовая плотность воздуха, скачком уменьшается,  $\rho_z \ll \rho_r$ . Таким образом, по всей высоте смерча образуются два закрученных (осесимметричных вращающихся) потока воздуха — периферийный, более плотный ( $\rho_r$ ), и внутренний, более разреженный ( $\rho_z$ ). Является очевидным, что прохождение частицами воздуха фронта скачка разрежения сопровождается возникновением перепада гравитационной энергии (разницы удельных потенциальных энергий положения по обе стороны от поверхности сопряжения — рис. 1, а). Наибольшее его значение имеют частицы, проходящие фронт скачка разрежения в нижнем нормальном сечении смерча. В верхнем (расходном) сечении смерча он равен нулю. Из всего сказанного следует, что удельная кинетическая энергия, характеризующаяся осевой составляющей вектора скорости, определяется не только перепадом

удельной потенциальной энергией давления,  $V_z \sim \sqrt{\frac{P^*}{\rho^*} - \frac{P_0}{\rho_0}}$ , срабатываемой, в основном, на фронте

скачка разрежения, но и перепадом удельной потенциальной энергией положения,  $\Delta V_z \sim \sqrt{(P I_\rho - 1) 2gH}$ .

Эпюра  $\Delta V_z$  в меридиональной плоскости смерча представлена на рис. 1, а.

Потенциальная энергия положения (гравитационная энергия) совместно с энергией вращательного движения значительных масс атмосферного воздуха является источником той мощности смерча, что так поражает воображение. Она является также причиной длительного существования смерча. С одной стороны, за счет внутреннего трения энергия вращательного движения от массы среды приосевой области передается секундной массе атмосферного воздуха по всей высоте смерча, имеющего аналогию с вихревой трубкой в идеальной жидкости. С другой стороны, от секундной массы вращающегося потока центральной области также за счет внутреннего трения энергия вращательного движения передается массе среды приосевой области. Возникает своеобразный атмосферный насос, прокачивающий через себя значительные массы атмосферного воздуха. Устанавливается газодинамическая самоподдерживающаяся энергетическая система.

Следует отметить, что в смерче имеют место внутренние газодинамические потери. Их источником является динамическое взаимодействие между массой среды приосевой области и потоком массы в центральной области. Кроме того, имеют место потери, связанные с неравномерностью распределения осевой составляющей скорости по радиусу центральной области. Можно полагать, что при огромной гравитационной энергии, которая реализуется в смерче, внутренние потери не могут играть существенной роли.

Грандиозный энергетический масштаб такого уникального явления природы, каким является смерч, подтверждается свидетельствами очевидцев и фото- и кинодокументами (рис. 4). По достижении смерчем поверхности земли его энергия реализуется в невиданные разрушения. За счет собственной энергии происходит разрушение и самого смерча. Это является следствием присоединения больших масс различных предметов, "втянутых" в центральную область смерча. Значительные присоединенные массы атмосферного воздуха могут быть "вброшены" в смерч за счет "ветрового" воздействия. Когда смерч берет на себя непосильный труд, его газодинамическая структура разрушается. Представленная для рассмотрения аналитическая модель смерча (торнадо) объясняет механизм преобразования гравитационной энергии, сконцентрированной запасенной в вертикальной газовой системе, в кинетическую энергию газового потока. Поиски путей использования данной энергии в практических целях является важнейшей проблемой.

## Список литературы

- Наливкин Д.В. Смерчи. — М: Наука, 1984. — 112 с.  
Хюбюк А.Ф. Бури и смерчи // Природа. — 1957, № 7.



- Vonnegut B.A., Meyer J.R. Luminous phenomena accompanying tornados // *Weatherwise*. — 1966. — Vol. 19, № 2.
- Политов В.С. Динамика закрученных течений идеального газа // *Динамика пространственных и неравновесных течений*. — Челябинск, Миасс, КБМ им. академика В.П. Макеева, 1992. — С. 259—270.
- Смольский И.Н. Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992. — 300с.
- Politov V.S. The results of analytical and experimental investigation of swirling gas flows // *International conference on methods of aerophysical research*. — Novosibirsk, 1998. — P. 173—178.
- Гупта А., Лилли Д., Сайред Н., *Закрученные потоки*. — М: Мир, 1987.
- Хргиан А.Х. *Физика атмосферы*. — М.: ГИТТЛ, 1953.
- Прандтль Л. *Гидроаэромеханика*. — М.: ИЛИ, 1951.
- Мельников А.П., Косоуров К.Ф., Тихоненко А.П. *Основы аэро–гидромеханики*. — Л.: ИЛИИГВФ, 1940. — 634 с.
- Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 583 с.
- Политов В.С., Головин А.Г. Некоторые вопросы газодинамики закрученных потоков // *Некоторые вопросы исследований вихревого эффекта и его промышленное применение: Сборник*. — Куйбышев, 1974. — С. 197—200.
- Абрамович Г.Н. *Прикладная газовая динамика*. — М.: Наука, 1991. — 597 с.